

单自由度二阶线性系统在各种输入函数(或实际波形)作用下的响应

林 继 清

提 要

本文利用福利叶的正、反变换原理和动力波形计算机反演方法解决单自由度二阶线性系统的响应问题。本文对几个典型波形的表达式及一个实测波形进行计算, 结果是满意的。

一、前 言

在爆破和机械振动测量中, 传感器是测量仪器的前驱, 是能否传递真实的振动信号的关键。很多传感器是应用单自由度二阶线性系统的原理设计制造的, 因此了解系统的特性和它对各种振动信号的响应是很重要的, 否则, 会导致把测量出的错误波形, 误认为是正确波形, 给工程带来损失。此外, 利用本文介绍的基本理论及反演计算方法, 对振动数据的处理和分析也很有帮助。

本文利用福利叶的正、反变换原理和动力波形计算机反演方法能方便地解决单自由度二阶线性系统的响应问题, 只要列出输入函数的表达式或实际波形即可计算。本文对几个典型波形的表达式及一个实测波形进行计算, 结果是满意的。

二、基本理论

单自由度二阶线性系统组成的振动系统模型之一如图 1。它由一个质量块、一个弹簧和

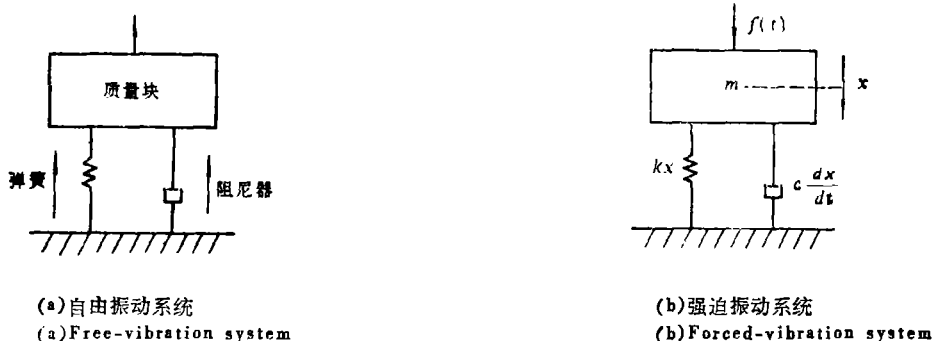


图 1 单自由度二阶线性系统模型

Fig. 1 Second-order linear system model with single freedom degree

一个阻尼器组成。如果系统呈线性, 则在无外力作用时, 质量的运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1)$$

在动力测量所使用的传感器中, 很多是利用单自由度二阶线性系统原理来设计的, 如摆式的各种微振仪、质量加弹簧式的加速度计等。

如图 1(b)所示, 当外力 $f(t)$ 作用于系统时, 其运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (2)$$

方程式(2)的解直接给出外力 $f(t)$ 作用下质量 m 的位移响应 $x(t)$ 。而速度响应 $v(t)$ 和加速度响应 $a(t)$, 可以从熟知的位移、速度和加速度之间的关系求得。

利用福利叶正、反变换原理和动力波形计算机反演的方法对任何输入函数或实际波形可求得单自由度二阶线性系统的响应。

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) H(\omega) e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} d\omega \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $f(j\omega)$ 、 $f(\omega)$ 是 $f(t)$ 的复频谱及幅频谱。

$$f(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = f(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)}$$

如果 $f(t)$ 是函数表达式, 则用表达式直接代入程序进行计算。如果是实际波形, 则用分点法读出对应各点时间的波幅值作为数据点的实部, 虚部取零。

$H(j\omega)$ 、 $H(\omega)$ 分别是单自由度二阶线性系统的复频特性及幅频特性。

$$H(j\omega) = H(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)} \quad (4)$$

在稳态的情况下

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega^2} - j \frac{2\omega_0^3 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega^2} \\ &= \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2}} e^{j\varphi_2(\omega)} \end{aligned}$$

由此得系统的幅频特性如图 2, 其表达式为

$$H(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega^2}} \quad (5)$$

相频特性如图 3, 其表达式为

$$\varphi_2(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi \omega_0 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (6)$$

式(5)、(6)中 ω_0 为系统自由振动圆频率, ω 为强迫振动圆频率, ξ 为系统阻尼系数。

由式(3)得

$$x(\omega) = f(\omega) H(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$

有了 $x(\omega)$ 、 $\varphi(\omega)$ 值后, 利用公式(3)以及反演程序即可计算 $x(t)$ 。

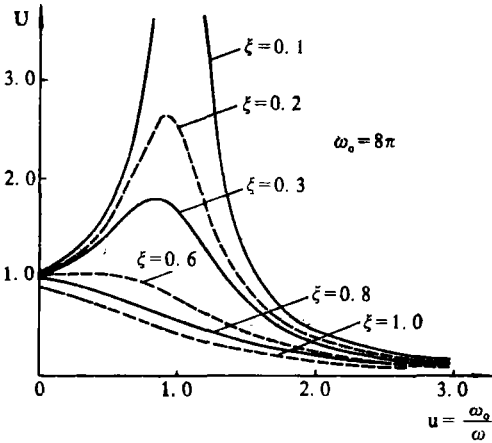


图 2 系统的幅频特性
Fig.2 Amplitude-frequency character of system

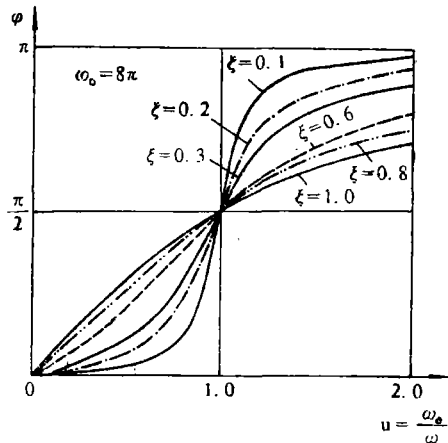


图 3 系统的相频特性
Fig.3 phase-frequency character of system

三、在几种输入函数（或波形）作用下系统的输出响应

(一)半正弦函数

输入函数为半正弦函数，其图形如图 4，5 中的 $x(t)$ ，函数表达式为

$$x(t)=\begin{cases}\sin\pi t, & 0\leq t\leq 1 \\ 0, & t>1\end{cases}$$

将表达式直接代入程序，并令 $\omega_0=\pi, 2\pi\cdots, \xi=0.1, 0.3, \cdots 0.8$ 等分别计算，计算结果可获得随 ω_0 及 ξ 变化的输出响应波形，如图 4，5。输出响应的最大值及相应时间如表1。输出响应最大值与自振频率 ω_0 的关系如图 6。

表 1 输出响应最大值及相应时间

Table 1 The maximum value of output response and corresponding time

ω_0	ξ							
	0.1		0.3		0.65		0.8	
	$x_{\max}$	t_1 (s)	$x_{\max}$	t_1 (s)	$x_{\max}$	t_1 (s)	$x_{\max}$	t_1 (s)
1π	2.89140	1.00000	1.21617	1.00000	1.75076	0.96875	0.67180	0.96875
3π	1.28625	0.53125	1.16830	0.56250	1.01086	0.65625	0.96074	0.68750
4π	1.22638	0.40625	1.07494	0.50000	1.00933	0.59375	0.98079	0.62500
5π	0.98733	0.62500	1.01765	0.53125	1.00536	0.59375	0.98795	0.59375
6π	1.07141	0.56250	1.01926	0.56250	1.00360	0.56250	0.99162	0.59375
8π			1.01926	0.56250				
14π	1.00881	0.53125	1.00314	0.50000	1.00078	0.53125	0.99844	0.53125

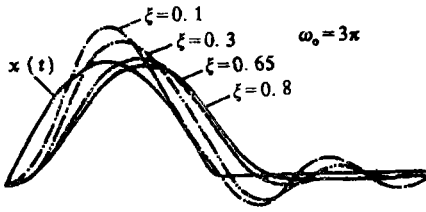
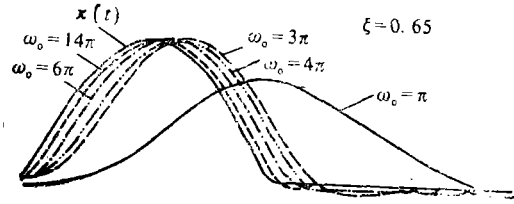
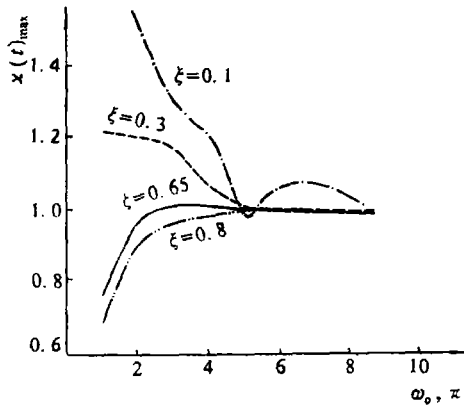
图 4 随 ξ 变化的输出响应波形Fig.4 Output response waveform changed with ξ 图 5 随 ω_0 变化的输出响应波形Fig.5 Output response waveform changed with ω_0 

图 6 输出响应最大值与自振频率的关系

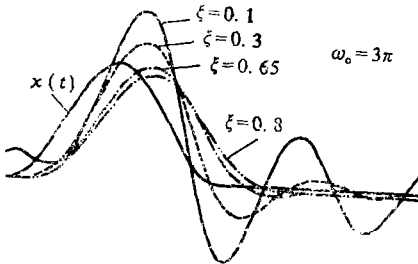
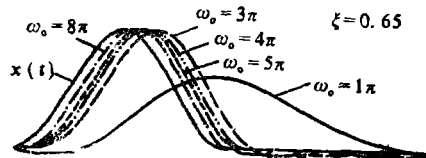
Fig.6 Relationship between the maximum value of output response and the frequency of free vibration

(二) 钟形脉冲函数

输入函数为钟形脉冲函数，其图形如图 7, 8 中的 $x(t)$ ，函数表达式为

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\cos 2\pi t), & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

将表达式直接代入程序进行计算，得到随 ω_0 及 ξ 变化的输出响应波形，如图 7, 8。输出响应最大值与相响时间关系如表 2。输出响应最大值与自振频率 ω_0 的关系如图 9。

图 7 随 ξ 变化的输出响应波形Fig.7 Output response waveform changed with ξ 图 8 随 ω_0 变化的输出响应波形Fig.8 Output response waveform changed with ω_0

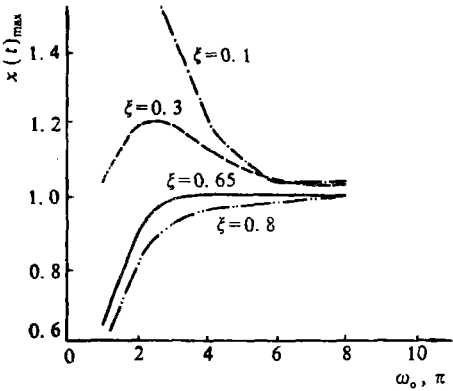


图 9 输出响应最大值与自振频率的关系

Fig.9 Relationship between the maximum value of output response and the frequency of free vibration

表 2 输出响应最大值及相应时间

Table 2 The maximum value of output response and corresponding time

ω_0	ξ							
	0.1		0.3		0.65		0.8	
	$x_{\max}$	t_1 (s)	$x_{\max}$	t_1 (s)	$x_{\max}$	t_1 (s)	$x_{\max}$	t_1 (s)
1π	2.45313	1.00000	1.03103	0.96875	0.6294	0.90625	0.56294	0.90625
3π	1.46449	0.62500	1.19617	0.62500	0.98289	0.65625	0.91542	0.65625
4π	1.22579	0.52125	1.13448	0.56250	1.00161	0.62500	0.96568	0.62500
5π	1.11218	0.46875	1.07670	0.53125	1.00583	0.59375	0.96916	0.62500
6π	1.03950	0.50000	1.04653	0.53125	1.00475	0.56250	0.98176	0.59375
8π	1.04000	0.50000	1.02671	0.53125	1.00300	0.56250	0.99050	0.56250
14π	1.00895	0.50000	1.00654	0.50000	1.00146	0.53125	0.99671	0.53125

(三)爆炸脉冲

输入函数为爆炸脉冲，其图形如图10，11中的 $x(t)$ ，函数表达式为

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau_r}, & 0 \leq t \leq \tau_r \\ \frac{1-t}{1-\tau_r} e^{-\frac{t-\tau_r}{1-\tau_r}}, & \tau_r \leq t \leq 1 \end{cases}$$

式中 τ_r 为脉冲上升时间。将表达式直接代入程序进行计算，得到随 ω_0 及 ξ 变化的输出响应波形如图10，11。输出响应最大值与相应时间如表 3。输出响应最大值与自振频率 ω_0 的关系如图12。

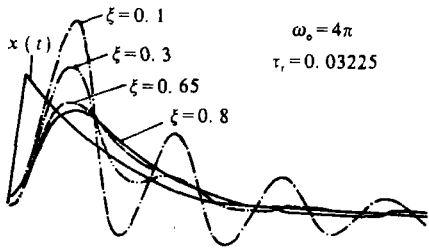


图 10 随 ξ 变化的输出响应波形

Fig.10 Output response waveform changed with ξ

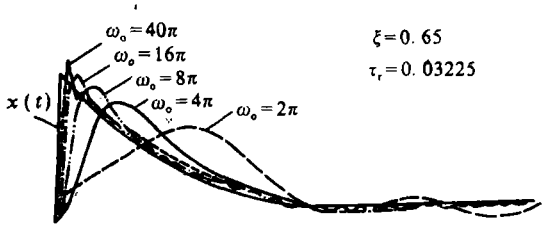


图 11 随 ω_0 变化的输出响应波形

Fig.11 Output response waveform changed with ω_0

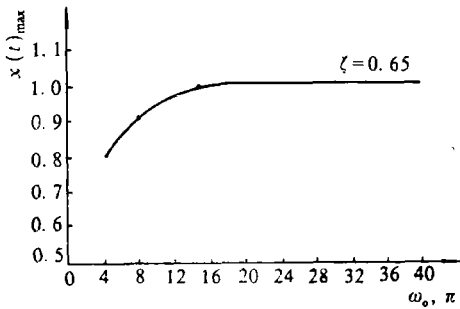


图 12 输出响应最大值与自振频率的关系

Fig.12 Relationship between the maximum value of output response and the frequency of free vibration

表3 输出响应最大值及相应时间

Table 3 The maximum value of output response and corresponding time

ω_0	ξ							
	0.1		0.3		0.65		0.8	
	x_{max}	t_1 (s)	x_{max}	t_1 (s)	x_{max}	t_1 (s)	x_{max}	t_1 (s)
4π	1.46838	0.25000	1.09357	0.25000	0.79951	0.25000	0.72256	0.28125
8π	1.57518	0.12500	1.22781	0.12500	0.92438	0.15625	0.84739	0.15629
16π					1.00099	0.09375		
40π					1.09523	0.06250		

(四) 实测大爆破波形

图 13、14 为作者在七七工程实测到的大爆破波形。将此波形记录在磁盘或磁带上，通过计算机软件调到内存来，并很方便地获得顺序-时间-波幅之间的对应数量关系。用波幅值作为输入数据点的实部，虚部取零，通过FFT程序计算，可算出幅频谱，相频谱，然后与输入函数为表达式的方法一样进行有关反演程序计算，可得到随 ω_0 及 ξ 变化的输出响应波形，如图

13、14。输出响应最大值与相应时间关系如表 4。输出响应最大值与自振频率的关系如图 15。

这个计算结果显示了真实的爆破波形与频率及阻尼不能满足测量要求的传感器测得的波形的差异，并可计算其误差。

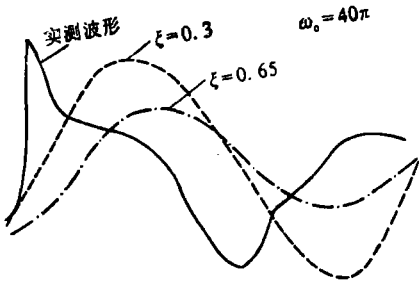


图 13 随 ζ 变化的输出响应波形
Fig.13 Output response waveform changed with ζ

表 4 输出响应最大值及相应时间

Table 4 The maximum value of output response and corresponding time

ω_0	ζ							
	0.1		0.3		0.65		0.8	
	$x_{\max}$	t_1 (s)	$x_{\max}$	t_1 (s)	$x_{\max}$	t_1 (s)	$x_{\max}$	t_1 (s)
20π					0.23700	0.96875		
220π					0.87300	0.34375		
440π	1.2300	0.28125	1.11675	0.28125	0.96600	0.28125	0.91500	0.31250

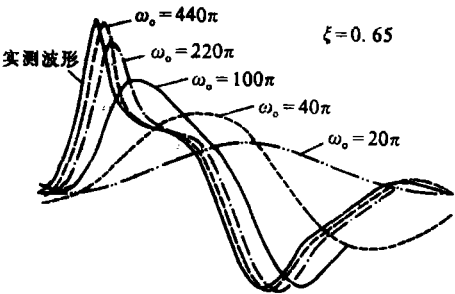


图 14 随 ω_0 变化的输出响应波形
Fig.14 Output response waveform changed with ω_0

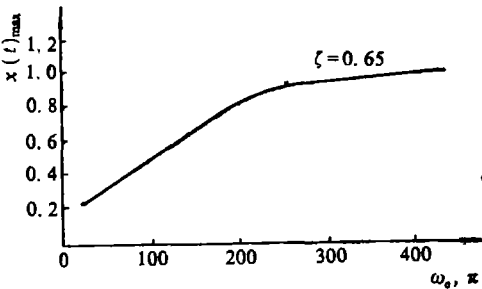


图 15 输出响应最大值与自振频率的关系
Fig.15 Relationship between the maximum value of output response and frequency of free vibration

通过计算分析，准确了解测量过程及结果，使对工程提供的动力参数稳妥可靠。

四、结 论

由四种输入函数(其中一个为实测波形)的响应计算结果可以得出:

1. 传感器的自振频率 ω_0 对响应波形的影响是敏感的,一般要求传感器的自振频率必须大于被测频率,当自振频率接近被测频率时,响应波形产生畸变, ω 越接近 ω_0 ,响应波形畸变越大。

2. 传感器的阻尼对响应波形的影响也是敏感的,当 $\xi < 0.6$,而 ω 又较接近 ω_0 时,对响应波形有放大作用, ξ 越小,放大愈大;当 $\xi > 0.7$ 时,对响应波形有缩小作用, ξ 越大,缩小愈多。因此,在使用单自由度二阶线性系统原理设计传感器时, ξ 调整到0.6—0.7之间较好。

3. 如果传感器的自振频率或阻尼不能满足测量的要求,应对其响应波形进行修正。利用本文使用的程序,不但可以修正,还可以求出其误差来。

4. 本文的理论及反演程序的计算对传感器的设计和计算有指导作用。

参 考 文 献

- [1] 邓斌、林继清,动力波形计算机反演的研究,岩土力学,第1期,1987年。
- [2] J.T.Broch,机械振动与冲击测量,西北机器厂情报室译,1972年。
- [3] 中国科学院地球物理所编,地震仪器概论,科学出版社,1975年。

Response of Second-order Linear System with Single Freedom Degree to Different Input Functions(or Practical Waveforms)

Lin Jiqing

Abstract

The response problem of second-order linear system with single freedom degree is solved by positive and inverse Fourier transform and dynamic waveform inversion method. Several expressions of typical waveforms and a measured practical waveform are calculated, and the results are satisfying.